431. Linear Operation ニツイテ(V)

泉　信一(東北大)
北川敏男(阪大)

コノ論文ノ目的ハ、Linear Operation ガ translatable ニナルタメノ條件ヲ求メルコトニアル。

1. $p>0$ トスル。$(L^p)=L^p(0,2\pi)$ ヲ $(0,2\pi)$ ニ於イテ絶對値ノ p 乘ガ (Lebesgue ノ意味デ) 積分可能ナ函數ノツクル空間トスル。$f(x)\in(L^p)$ ナルトキ

$$\|f\|=\sqrt[p]{\int_0^{2\pi}|f(x)|^p dx}$$

トオキ、之ヲ $f(x)$ ノ norm トイフ。然ルトキ (L^p) ハ (Banach ノ意味デ) normalised space ニナル。

次ニ $\Lambda(f)$ ハ $f(x)\in(L^p)$ ヲ $g(t)\in(L^q)$ ニ變換スル linear Operation トスル。之ヲ次ノ様ニ表ス:

$$\Lambda(f)=\Lambda_x\{t,f(x)\}=\Lambda\{t,f(x)\}$$

(L^p) 及ビ (L^q) ニ屬スル各々ノ $f(x)$ 及ビ $g(t)$ ニ對シテ periodic Continuation ヲ施シテアルト考ヘル。$f(x)$ カラ $f(x+a)$ ヲツクル Operation ヲ T_a デ表ハス。Λ ガ任意ノ実数 a ト常ニ permutable ナルトキ，即チ

$$T_a\Lambda\{t, f(x)\}=\Lambda\{t, T_a f(x)\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

ナルトキ Λ ヲ translatable トイフ。

定理 1. Λ ガ translatable ナルタメノ必要且ツ充分條件ハ $\lambda=2n\pi i$ $(n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots\cdots, \pm n, \cdots\cdots)$ ニ對シテ

$$\Lambda\{t, e^{\lambda x}\}=G(\lambda)\, e^{\lambda t} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

トナルコトデアル。コヽニ $G(\lambda)$ ハ λ ノミノ函数デアル。

証明：Λ ガ translatable ナラバ、即チ (1) ガ成立スレバ，(1) ニ於テ $f(x)=e^{\lambda x}$ トオクトキ

$$\Lambda\{t+a, e^{\lambda x}\}=T_a\Lambda\{t, e^{\lambda x}\}=\Lambda\{t, T_a e^{\lambda x}\}$$
$$=\Lambda\{t, e^{\lambda(x+a)}\}$$

即チ

$$\Lambda\{t+a, e^{\lambda x}\}=e^{\lambda a}\Lambda\{t, e^{\lambda x}\}$$

故ニ

$$g_\lambda(t)=\Lambda\{t, e^{\lambda x}\}$$

トオケバ

$$g_\lambda(t+a)=e^{\lambda a}g_\lambda(t)$$

然ルニ、コノ式ハスベテノ a ニ對シテ成立スルカラ、$g_\lambda(t_1)$ ガ有限デアルヤウナ t_1 ヲトリ、$a=t-t_1$ トスレバ

$$g_\lambda(t)=g_\lambda(t_1)\, e^{\lambda(t-t_1)}$$

ヨツテ $e^{-\lambda t_1} g_\lambda(t_1) = G(\lambda)$ トオクトキ (2) ヲ得ル。故ニ條件ハ必要デアル。

次ニ條件ノ十分ナコトヲ證明シヨウ。$f(x) \in (L^p)$ トスルトキ $\Lambda(f)$ ノ linear ナルコトカラ、ヨク知ラレタ Banach ノ定理ニヨリ

$$\sqrt[q]{\int_0^{2\pi} \left|\Lambda\{t, f(x)\}\right|^q dt} \leqq G \sqrt[p]{\int_0^{2\pi} |f(x)|^p dx} \text{------} (3)$$

トナルヤウナ常數 $G \geqq 0$ ガ $f(x)$ = independent ニ存在スル。(1)

然ルニ F. Riesz ノ定理ニヨツテ

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} \left|f(x) - P_n(x)\right|^p dx = 0 \text{------} (4)$$

トナル様ナ $\{e^{n\pi i}\}$ ノ polynomial seq. $\{P_n(x)\}$ ガ存在スル。(4) ノ成立スルヤウナ $\{P_n(x)\}$ ニ對シテ

$$f(x) = \underset{n\to\infty}{l.m.}^p P_n(x)$$

デ表ハス。然ルトキ (3) カラ (4) ノ成立スルヤウナ $\{P_n(x)\}$ ニ對シテ

$$\Lambda\{t, f(x)\} = \underset{n\to\infty}{l.m.}^q \Lambda\{t, P_n(x)\} \text{------} (5)$$

今 $P_n(x) = \sum_{k=-m_n}^{m_n} a_{n,k} e^{2k\pi i x}$ トオクトキ、任意ノ實數 a ニ對シテ

---

(1) (3) カラ必然的ニ

$$|G(2k\pi i)| \leqq \frac{G}{\sqrt[q]{2\pi}} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \text{------})$$

$$\Lambda\left\{t+a, f(x)\right\} = \underset{n\to\infty}{l.m.}^{q} \Lambda\left\{t+a, \sum_{k=-m_n}^{m_n} a_{n,k} e^{2k\pi i x}\right\}$$

$$= \underset{n\to\infty}{l.m.}^{q} \sum_{k=-m_n}^{m_n} a_{n,k} \Lambda\left\{t+a, e^{2k\pi i x}\right\}$$

$$= \underset{n\to\infty}{l.m.}^{q} \sum_{k=-m_n}^{m_n} a_{n,k} G(2k\pi i x) e^{2k\pi (t+a) i}$$

$$= \underset{n\to\infty}{l.m.}^{q} \sum_{k=-m_n}^{m_n} a_{n,k} \Lambda\left\{t, e^{2k\pi (x+a) i}\right\}$$

$$= \underset{n\to\infty}{l.m.}^{q} \Lambda\left\{t, P_n(x+a)\right\}$$

コレト (5) トヲ結合シテ

$$\Lambda\left(t+a, f(x)\right\} = \Lambda\left\{t, f(x+a)\right\}.$$

依ッテ定理ハ証明サレタ。

2. 定理 I ハ (L^p) 及ビ (L^q) ノ何レカ一方又ハ両方ヲ (C) デオキカヘタトキニモ成立スル。但シソノトキ *F. Riesz* ノ定理ヲ用キルカハリニ、*Fejèr* ノ定理ヲ用キレバヨイ。

更ニ E 及ビ E_1 ヲ $(-\infty, \infty)$ ニ於イテ定義サレタ函数ノ *normalised space* トシ、$\Lambda(f)$ ノ *domain* ガ E デソノ *contra-don.* ガ E_1 ニ含マレテヰルトスル、モシ任意ノ $f(x) \varepsilon E$ ニ對シテ

$$\lim_{n\to\infty} \| f(x) - P_n(x) \| = 0 \text{ .... } (6)$$

トナル様ナ $e^{\lambda x}$ ノ *polynominals* ノ *seq.* $\{P_n(x)\}$ ガ存在スルナラバ、定理 I ト同ジ方針デ進メルコトハ明カデ

アル。
特ニEガ almost periodic function ノツクル
space ナルトキ、條件(6)ハミタサレテヰル。